第27卷 第1期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 1
2010年02月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Feb. 2010

文章编号:1005-3085(2010)01-0125-08

分块均匀介质中 Maxwell-Ohm 方程组的 Cauchy 问题

陈明烨

(复旦大学数学科学学院，上海 200433)

摘　要: 在石油测井模型中，我们遇到一类具有间断系数的 Maxwell-Ohm 方程组的问题。本文讨论其中有代表性的一类问题—即具有分块常系数和交界面条件的 Maxwell-Ohm 方程组的 Cauchy 问题。通过研究该问题所对应的 Sobolev 空间的性质，并应用算子半群的方法给出该问题解的存在唯一性。

关键词: Maxwell-Ohm 方程组；间断系数；Cauchy 问题；算子半群

分类号: **AMS**(2000) 35R05　　**中图分类号**: O175.27　　**文献标识码**: A

1　引言

石油测井的方法很多，有感应测井、密度测井、声波测井、直流电法测井、自然电位法测井等。不同方法所关心的物理量各不相同，相应的物理机制各异，数学模型也因而各不相同。李大潜等在文献 [1] 中已经对直流电法测井建立了完整的模型、理论体系以及计算方法。近年来，交流电法测井开始得到重视，但对其数学模型的建立和研究都进行得非常有限。对于交流电，我们的研究必须从最基本的 Maxwell 方程组出发。石油地层模型中包含多种不同介电常数和磁导率的均匀介质，这种特殊性导致 Maxwell 方程组中的系数将是不连续的，并且在不同介质的交界面上要满足一定的交界面条件。这类问题被人研究得较少。参考文献 [2,3] 对这类问题作了一些初步讨论。本文通过对函数空间 $\mathcal{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega)$ 的研究，将具有间断系数和交界面条件的 Maxwell-Ohm 方程组化作了特定 Hilbert 空间上的抽象 Cauchy 问题，从而应用算子半群的方法获得其解的存在唯一性。

2　Maxwell-Ohm 方程组

假设在连续导电介质所在的子区域中，电导率 σ、介电常数 ϵ 和磁导率 μ 等都是不随时间变化的常数，并成立 Ohm 定律，即成立

$$\vec{j}=\sigma\vec{E}, \tag{1}$$

其中 $\vec{E}$ 为电场强度，而 $\vec{j}$ 为电流密度向量，对导电介质中 Maxwell 方程组及不同介质间相应的交界面条件，可化为如下的 Maxwell-Ohm 方程组

$$\begin{cases} \epsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\mathrm{curl}\vec{H}+\sigma\vec{E}=0, \\ \mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}+\mathrm{curl}\vec{E}=0. \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期: 2009-06-04.　**作者简介**: 陈明烨 (1985年1月生)，男，硕士. 研究方向：偏微分方程.

相应的交界面条件如下

$$\begin{cases} [\overrightarrow{E}] \times \overrightarrow{n} = 0, \\ [\overrightarrow{H}] \times \overrightarrow{n} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

其中 $\overrightarrow{H}$ 为磁场强度，$\overrightarrow{n}$ 为交界面的单位法向量，而 $[\overrightarrow{E}] = \overrightarrow{E}^+ - \overrightarrow{E}^-$ 为电场强度 $\overrightarrow{E}$ 在交界面上的跃度。对适当给定的初始条件

$$\begin{cases} \overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}, \\ \overrightarrow{H} = \overrightarrow{H_0}, \end{cases} \tag{4}$$

我们讨论其 Cauchy 问题，并简称其为问题 (*)。

注1 本文仅假设 $\mathcal{R}^3$ 中有一单连通光滑交界面 Γ 将全空间分成两个具有均匀导电介质的开区域的情形。

3 $\mathcal{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega)$ 空间

定义1 以下均假设 Ω 是 $\mathcal{R}^3$ 中具有光滑边界的区域，令

$$\mathcal{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega) = \{ \overrightarrow{\psi} \mid \overrightarrow{\psi} \in L^2(\Omega)^3,\ \mathrm{curl}\overrightarrow{\psi} \in L^2(\Omega)^3 \},$$

并装备有范数 $\|\overrightarrow{\psi}\|_{L^2} + \|\mathrm{curl}\overrightarrow{\psi}\|_{L^2}$。它是一个 Hilbert 空间。

对 $\mathcal{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega)$ 空间可以建立一个相应的迹定理。这里为了下文的需要只给出迹定理的一个粗糙的形式。迹定理的精细表达可见文献 [2]。

定理1 对任意给定的 $\overrightarrow{\varphi} \in \mathcal{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega)$，在边界 $\partial\Omega$ 上 $\overrightarrow{\varphi} \times \overrightarrow{n}$ 有 $\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3$ 意义下的迹。且成立

$$\|\overrightarrow{\varphi} \times \overrightarrow{n}\|_{\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3} \le c\|\overrightarrow{\varphi}\|_{\mathcal{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega)}, \tag{5}$$

其中 c 为一个与 $\overrightarrow{\varphi}$ 无关的正常数。

证明 对于一切 $\overrightarrow{\varphi}$, $\overrightarrow{\psi} \in C^\infty(\Omega)^3$，成立以下 Green 公式

$$\int_{\partial\Omega} (\overrightarrow{\varphi} \times \overrightarrow{n}) \cdot \overrightarrow{\psi}\mathrm{d}\gamma = \int_\Omega (\mathrm{curl}\overrightarrow{\psi} \cdot \overrightarrow{\varphi} - \mathrm{curl}\overrightarrow{\varphi} \cdot \overrightarrow{\psi})\mathrm{d}x. \tag{6}$$

如果 $\overrightarrow{\varphi} \in \mathcal{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega)$, $\overrightarrow{\psi} \in \mathcal{H}^1(\Omega)^3$，等式右端有意义。而由迹定理可知 $\overrightarrow{\psi} \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3$，于是等式左端以对偶积的形式给出了 $\overrightarrow{\varphi} \times \overrightarrow{n} \in \mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3$。同时由 (6) 还可以得到

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (\overrightarrow{\varphi} \times \overrightarrow{n}) \cdot \overrightarrow{\psi}\mathrm{d}\gamma \ &\le\ \|\mathrm{curl}\overrightarrow{\psi}\|_{L^2(\Omega)^3}\|\overrightarrow{\varphi}\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\mathrm{curl}\overrightarrow{\varphi}\|_{L^2(\Omega)^3}\|\overrightarrow{\psi}\|_{L^2(\Omega)^3} \\ &\le\ c_1\|\overrightarrow{\psi}\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)^3}\|\overrightarrow{\varphi}\|_{\mathcal{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{7}$$

由逆迹定理知道对于任意给定的 $\overrightarrow{\psi} \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3$，存在延拓 $\overrightarrow{\tilde{\psi}} \in \mathcal{H}^1(\Omega)^3$ 满足

$$\|\overrightarrow{\tilde{\psi}}\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)^3} \le c_2\|\overrightarrow{\psi}\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3}, \tag{8}$$

其中 c_2 是一个与 $\overrightarrow{\psi}$ 无关的正常数。结合 (7) 就有

$$\frac{\int_{\partial\Omega}(\overrightarrow{\varphi} \times \overrightarrow{n}) \cdot \overrightarrow{\psi}\mathrm{d}\gamma}{\|\overrightarrow{\psi}\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3}} \le c\|\overrightarrow{\varphi}\|_{\mathcal{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega)}. \tag{9}$$

从而

$$\|\overrightarrow{\varphi}\times\overrightarrow{n}\|_{\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3}\le c\|\overrightarrow{\varphi}\|_{\mathcal{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega)}. \tag{10}$$

同理还有以下结论成立。

定理2 对于任意给定的 $\overrightarrow{\varphi}\in\mathcal{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega)$，在边界 $\partial\Omega$ 上 $\overrightarrow{\varphi}$ 有 $\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3$ 意义下的迹，且成立估计式

$$\|\overrightarrow{\varphi}\|_{\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3}\le c\|\overrightarrow{\varphi}\|_{\mathcal{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega)}, \tag{11}$$

其中 c 为一个与 $\overrightarrow{\varphi}$ 无关的正常数。

接下来给出关于交界面条件的结论。

定理3 如果 $\overrightarrow{\varphi}\in\mathcal{H}_{\mathrm{curl}}(\mathcal{R}^3)$，则成立交界面条件

$$\int_{\Gamma^+}(\overrightarrow{\varphi}\times\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{\psi}\mathrm{d}\gamma+\int_{\Gamma^-}(\overrightarrow{\varphi}\times\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{\psi}\mathrm{d}\gamma=0,\quad\forall\ \overrightarrow{\psi}\in\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3. \tag{12}$$

证明 对于任意给定的 $\overrightarrow{\varphi}\in\mathcal{H}_{\mathrm{curl}}(\mathcal{R}^3)$ 和一切 $\overrightarrow{\psi}\in\mathcal{H}^1(\mathcal{R}^3)^3$，由定理1在 Ω_1,Ω_2 上分别有

$$\int_{\Gamma^+}(\overrightarrow{\varphi}\times\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{\psi}\mathrm{d}\gamma=\int_{\Omega_1}(\mathrm{curl}\overrightarrow{\psi}\cdot\overrightarrow{\varphi}-\mathrm{curl}\overrightarrow{\varphi}\cdot\overrightarrow{\psi})\mathrm{d}x, \tag{13}$$

$$\int_{\Gamma^-}(\overrightarrow{\varphi}\times\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{\psi}\mathrm{d}\gamma=\int_{\Omega_2}(\mathrm{curl}\overrightarrow{\psi}\cdot\overrightarrow{\varphi}-\mathrm{curl}\overrightarrow{\varphi}\cdot\overrightarrow{\psi})\mathrm{d}x. \tag{14}$$

另一方面，根据广义旋度的定义，对于 $\overrightarrow{\varphi}\in\mathcal{H}_{\mathrm{curl}}(\mathcal{R}^3)$，有

$$\int_{\mathcal{R}^3}\mathrm{curl}\overrightarrow{\varphi}\cdot\overrightarrow{\chi}\mathrm{d}x-\int_{\mathcal{R}^3}\overrightarrow{\varphi}\cdot\mathrm{curl}\overrightarrow{\chi}\mathrm{d}x=0,\quad\forall\ \overrightarrow{\chi}\in C_c^\infty(\mathcal{R}^3)^3. \tag{15}$$

由于 $\overrightarrow{\chi}\in C_c^\infty(\mathcal{R}^3)^3$ 在 $\mathcal{H}^1(\mathcal{R}^3)^3$ 中稠密，必存在 $\overrightarrow{\chi}_n\in C_c^\infty(\mathcal{R}^3)^3$ 在 $\mathcal{H}^1(\mathcal{R}^3)^3$ 收敛于 $\overrightarrow{\psi}$，因而

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{R}^3}(\mathrm{curl}\overrightarrow{\varphi}\cdot\overrightarrow{\psi}-\overrightarrow{\varphi}\cdot\mathrm{curl}\overrightarrow{\psi})\mathrm{d}x\\=&\lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{R}^3}(\overrightarrow{\varphi}\cdot\overrightarrow{\chi}_i\mathrm{d}x-\overrightarrow{\varphi}\cdot\mathrm{curl}\overrightarrow{\chi}_i)\mathrm{d}x=0.\end{aligned} \tag{16}$$

结合(13)-(14)及(16)得出

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma^+}(\overrightarrow{\varphi}\times\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{\psi}\mathrm{d}\gamma+\int_{\Gamma^-}(\overrightarrow{\varphi}\times\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{\psi}\mathrm{d}\gamma\\=&\int_{\mathcal{R}^3}(\mathrm{curl}\overrightarrow{\varphi}\cdot\overrightarrow{\psi}-\overrightarrow{\varphi}\cdot\mathrm{curl}\overrightarrow{\psi})\mathrm{d}x=0.\end{aligned} \tag{17}$$

注2 当定理3中的 $\overrightarrow{\psi}$ 和 $\overrightarrow{\varphi}$ 是连续函数时，定理3中所给出的交界面条件就是 $[\overrightarrow{\varphi}]\times\overrightarrow{n}=0$。这说明：交界面条件本质上可以化作对所考虑的函数空间的某种正则性的要求。这样问题(*)可转化到在空间 $\mathcal{H}_{\mathrm{curl}}(\mathcal{R}^3)$ 中求解如下方程组

$$\begin{cases}\epsilon\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}-\mathrm{curl}\overrightarrow{H}+\sigma\overrightarrow{E}=0,\\[2mm]\mu\dfrac{\partial\overrightarrow{H}}{\partial t}+\mathrm{curl}\overrightarrow{E}=0\end{cases} \tag{18}$$

具有初值

$$\begin{cases} \overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}, \\ \overrightarrow{H} = \overrightarrow{H_0} \end{cases} \tag{19}$$

的 Cauchy 问题，此时解将自动满足问题 (*) 中的交界面条件。我们称该问题为问题 (†)。

定理 3 的证明过程实际上还给出了我们今后需要用到如下重要结论。

定理 4 如果 $\overrightarrow{\varphi}$, $\overrightarrow{\psi} \in \mathcal{H}_{\mathrm{curl}}(\mathcal{R}^3)$，则成立

$$\int_{\mathcal{R}^3} \left(\mathrm{curl}\overrightarrow{\varphi} \cdot \overrightarrow{\psi} - \overrightarrow{\varphi} \cdot \mathrm{curl}\overrightarrow{\psi}\right)\mathrm{d}x = 0. \tag{20}$$

4 连续压缩算子半群

我们不加证明地给出文献 [4] 和 文献 [5] 中有关算子半群的两个结论。

引理 1 设 $A : D(A) \to \mathcal{W}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{W}$ 中给定的线性算子，则 A 是某个连续压缩算子半群的无穷小生成元的充分必要条件是:

1) A 是 $\mathcal{W}$ 上的稠定闭算子，即 $D(A)$ 在 $\mathcal{W}$ 中稠密，若 $\mathcal{W}$ 中的序列 $x_n \to x$ 且 $Ax_n \to y$，则 $x \in D(A)$ 且 $Ax = y$;

2) $\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle \leq 0$，其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\mathcal{W}$ 上的内积;

3) 存在某个 $\lambda > 0$, $\lambda I - A$ 是由 $D(A)$ 到 $\mathcal{W}$ 的满射。

引理 2 若 A 是某个连续压缩算子半群的无穷小生成元，那么 Hilbert 空间上的抽象 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Au, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{21}$$

存在唯一的解 $u \in C^1([0,\infty);\mathcal{W}) \cap C^0([0,\infty);D(A))$。

5 问题的转化

做变量替换

$$\begin{cases} \overrightarrow{E'} = \sqrt{\epsilon}\overrightarrow{E}, \\ \overrightarrow{H'} = \sqrt{\mu}\overrightarrow{H}. \end{cases} \tag{22}$$

问题 (†) 相应地化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\overrightarrow{E'}}{\partial t} - \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathrm{curl}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{\mu}}\overrightarrow{H'}\Big) + \dfrac{\sigma}{\epsilon}\overrightarrow{E'} = 0, \\ \dfrac{\partial\overrightarrow{H'}}{\partial t} + \dfrac{1}{\sqrt{\mu}}\mathrm{curl}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}}\overrightarrow{E'}\Big) = 0 \end{cases} \tag{23}$$

及

$$t = 0 : \begin{cases} \overrightarrow{E'} = \sqrt{\epsilon}\overrightarrow{E_0}, \\ \overrightarrow{H'} = \sqrt{\mu}\overrightarrow{H_0}. \end{cases} \tag{24}$$

记

$$A=\begin{pmatrix} -\dfrac{\sigma}{\epsilon} & +\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathrm{curl}\dfrac{1}{\sqrt{\mu}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{\mu}}\mathrm{curl}\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

$$u=\begin{pmatrix} \overrightarrow{E'} \\ \overrightarrow{H'} \end{pmatrix},\quad u_0=\begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon}\overrightarrow{E_0} \\ \sqrt{\mu}\overrightarrow{H_0} \end{pmatrix}, \tag{26}$$

(23)-(24) 就可以写成 Hilbert 空间 $L^2(\mathcal{R}^3)^3\oplus L^2(\mathcal{R}^3)^3$ 上的抽象 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=Au, \\ u(0)=u_0. \end{cases} \tag{27}$$

在这个问题中 $D(A)=\mathcal{H}^{\epsilon}_{\mathrm{curl}}(\mathcal{R}^3)\oplus\mathcal{H}^{\mu}_{\mathrm{curl}}(\mathcal{R}^3)$，其中

$$\mathcal{H}^{\epsilon}_{\mathrm{curl}}(\mathcal{R}^3)=\{\overrightarrow{E'}=\sqrt{\epsilon}\overrightarrow{E}\mid\overrightarrow{E}\in\mathcal{H}_{\mathrm{curl}}(\mathcal{R}^3)\},$$

$$\mathcal{H}^{\mu}_{\mathrm{curl}}(\mathcal{R}^3)=\{\overrightarrow{H'}=\sqrt{\mu}\overrightarrow{H}\mid\overrightarrow{H}\in\mathcal{H}_{\mathrm{curl}}(\mathcal{R}^3)\}.$$

6 解的存在唯一性

以下以 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $L^2(\mathcal{R}^3)^6=L^2(\mathcal{R}^3)^3\oplus L^2(\mathcal{R}^3)^3$ 上的内积。$\|\cdot\|$ 为其诱导范数。

引理 3 在 $D(A)$ 上定义内积为

$$\int_{\mathcal{R}^3}\Big(\overrightarrow{\varphi}\cdot\overrightarrow{\varphi}'+\overrightarrow{\psi}\cdot\overrightarrow{\psi}'+\mathrm{curl}\Big(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\overrightarrow{\varphi}\Big)\cdot\mathrm{curl}\Big(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\overrightarrow{\varphi}'\Big)+\mathrm{curl}\Big(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\overrightarrow{\psi}\Big)\cdot\mathrm{curl}\Big(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\overrightarrow{\psi}'\Big)\Big)\mathrm{d}x,$$

其中

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi} \\ \overrightarrow{\psi} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi}' \\ \overrightarrow{\psi}' \end{pmatrix}\in D(A).$$

$D(A)$ 在这个范数下是一个 Hilbert 空间。

证明 由于 $\mathcal{H}_{\mathrm{curl}}(\mathcal{R}^3)$ 是一个 Hilbert 空间，命题显然。

引理 4 A 是 $L^2(\mathcal{R}^3)^3\oplus L^2(\mathcal{R}^3)^3$ 上的稠定闭算子。

证明 易知 $C_c^\infty(\overline{\Omega_i})^3$ 在 $\mathcal{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega_i)$ 和 $L^2(\Omega_i)^3$ $(i=1,2)$ 中稠密。构造函数类

$$\mathcal{F}^\epsilon=\{\epsilon_1\overrightarrow{\psi}_1+\epsilon_2\overrightarrow{\psi}_2\},$$

其中 $\overrightarrow{\psi}_i$ $(i=1,2)$ 是 $C_c^\infty(\overline{\Omega_i})^3$ 中的函数在 $\mathcal{R}^3$ 上的零延拓。注意到 $C_c^\infty(\mathcal{R}^3)^3\subset\mathcal{F}^\epsilon$，显然 $\mathcal{F}^\epsilon$ 在 $\mathcal{H}^\epsilon_{\mathrm{curl}}(\mathcal{R}^3)$ 和 $L^2(\mathcal{R}^3)^3$ 中稠密。类似地构造

$$\mathcal{F}^\mu=\{\mu_1\overrightarrow{\psi}_1+\mu_2\overrightarrow{\psi}_2\},$$

它在 $\mathcal{H}^\mu_{\mathrm{curl}}(\mathcal{R}^3)$ 和 $L^2(\mathcal{R}^3)^3$ 中稠密。于是 $\mathcal{F}^\epsilon\oplus\mathcal{F}^\mu$ 在 $D(A)$ 和 $L^2(\mathcal{R}^3)^3\oplus L^2(\mathcal{R}^3)^3$ 中稠密，从而 $D(A)$ 在 $L^2(\mathcal{R}^3)^3\oplus L^2(\mathcal{R}^3)^3$ 中稠密。

若 $x_n \in D(A)$, $x_n \to x$ 且 $Ax_n \to y$。记

$$x_n = \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_n \\ \vec{\psi}_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \vec{\varphi} \\ \vec{\psi} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \vec{\Phi} \\ \vec{\Psi} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

就有

$$\begin{pmatrix} \vec{\varphi}_n \\ \vec{\psi}_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \vec{\varphi} \\ \vec{\psi} \end{pmatrix},$$

且

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathrm{curl}\Big(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\vec{\psi}_n\Big) + \frac{\sigma}{\epsilon}\vec{\varphi}_n \\ +\frac{1}{\sqrt{\mu}}\mathrm{curl}\Big(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\vec{\varphi}_n\Big) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \vec{\Phi} \\ \vec{\Psi} \end{pmatrix}.$$

从而

$$\begin{pmatrix} \mathrm{curl}\Big(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\vec{\psi}_n\Big) \\ \mathrm{curl}\Big(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\vec{\varphi}_n\Big) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon}\Big(\frac{\sigma}{\epsilon}\vec{\varphi} - \vec{\Phi}\Big) \\ \sqrt{\mu}\vec{\Psi} \end{pmatrix}.$$

由此不难看出

$$\begin{pmatrix} \vec{\varphi}_n \\ \vec{\psi}_n \end{pmatrix}$$

以引理3中定义的内积所诱导的范数收敛。由 $D(A)$ 完备性知道

$$x = \begin{pmatrix} \vec{\varphi} \\ \vec{\psi} \end{pmatrix} \in D(A).$$

而 $Ax = y$ 亦为显然。

引理5 $\mathrm{Re}\langle Ax,\ x\rangle \le 0$。

证明 由

$$\langle Ax,\, x\rangle = \int_{\mathcal{R}^3} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathrm{curl}\frac{1}{\sqrt{\mu}}\vec{H'}\cdot\vec{E'} - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\mathrm{curl}\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\vec{E'}\cdot\vec{H'} - \frac{\sigma}{\epsilon}\vec{E'}\cdot\vec{E'}\mathrm{d}x,$$

应用定理4，有

$$\langle Ax,\, x\rangle = \int_{\mathcal{R}^3} -\frac{\sigma}{\epsilon}\|\vec{E'}\|^2\mathrm{d}x \le 0.$$

最后还要验证 $\lambda I - A$ 是满射。为此需要一些泛函分析的结论。

定义2 设 T 是 Hilbert 空间 $\mathcal{W}$ 上的稠定算子。记

$$D(T^*) = \big\{y \in \mathcal{W} \mid 存在\, y^* \in \mathcal{W},\ 使得\, \langle Tx,\, y\rangle = \langle x,\, y^*\rangle,\ \forall\, x \in D(T)\big\}, \tag{29}$$

定义 $D(T^*)$ 上的线性算子 $T^*: y \mapsto y^*$。称 T^* 为 T 的共轭算子。

引理6 设 T 是 Hilbert 空间 $\mathcal{W}$ 上的稠定算子，则 $\overline{\mathrm{Ran}T} = (\mathrm{Ker}T^*)^{\perp}$，其中 Ker 表示线性算子的核，Ran 表示线性算子的值域。

证明　见参考文献 [6] 第 116 页。

引理 7　对于任意给定的 $\lambda > 0$, $\lambda I - A$ 是由 $D(A)$ 到 $L^2(\mathcal{R}^3)^3 \oplus L^2(\mathcal{R}^3)^3$ 的满射。

证明　通过分部积分不难看出 A 的共轭算子是 A^*，其中

$$A^* = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sigma}{\epsilon} & -\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathrm{curl}\dfrac{1}{\sqrt{\mu}} \\ +\dfrac{1}{\sqrt{\mu}}\mathrm{curl}\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

而 $\lambda I - A$ 的共轭算子是 $\lambda I - A^*$。且有

$$D(\lambda I - A) = D(\lambda I - A^*) = \mathcal{H}^{\epsilon}_{\mathrm{curl}}(\mathcal{R}^3) \oplus \mathcal{H}^{\mu}_{\mathrm{curl}}(\mathcal{R}^3).$$

通过类似于引理 5 中的计算过程，对任意给定的 $\lambda > 0$，有

$$\begin{aligned} \|\lambda x - A^* x\|\|x\| &\geq \langle \lambda x - A^* x, x\rangle \\ &= \int_{\mathcal{R}^3} \Big(\lambda(\|\overrightarrow{E'}\|^2 + \|\overrightarrow{H'}\|^2) + \frac{\sigma}{\epsilon}\|\overrightarrow{E'}\|^2\Big)\mathrm{d}x \geq c\|x\|^2 \end{aligned} \tag{31}$$

及

$$\|\lambda x - Ax\|\|x\| \geq \langle \lambda x - Ax, x\rangle \geq c\|x\|^2. \tag{32}$$

设 $\mathrm{Ran}(\lambda - A)$ 中的基本列 $y_n = \lambda x_n - Ax_n$ 收敛于 y，由 (32)，有

$$\|y_n - y_m\| = \|(\lambda x_n - Ax_n) - (\lambda x_m - Ax_m)\| \geq \|x_n - x_m\|.$$

从而 x_n 收敛于某个 x, Ax_n 收敛于 $\lambda x - y$。根据引理 4，A 是闭算子，于是 $x \in D(A)$ 且 $Ax = \lambda x - y$，也就有 $(\lambda I - A)x = y$，所以 $\mathrm{Ran}(\lambda I - A)$ 是闭集。另一方面，由 (31) 知道 $\ker(\lambda I - A^*) = 0$ 再结合引理 6 就有

$$\mathrm{Ran}(\lambda I - A) = \overline{\mathrm{Ran}(\lambda I - A)} = \big(\mathrm{Ker}(\lambda I - A^*)\big)^{\perp} = L^2(\mathcal{R}^3)^3 \oplus L^2(\mathcal{R}^3)^3,$$

即 $\lambda I - A$ 是满射。

此时我们得到 A 满足引理 1 中间的三个条件，于是可以使用引理 1 和引理 2 得到以下定理。

定理 5　Hilbert 空间 $L^2(\mathcal{R}^3)^3 \oplus L^2(\mathcal{R}^3)^3$ 上的抽象 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Au, \\ u(0) = u_0 \in D(A) \end{cases}$$

存在唯一的解

$$u(t) \in C^1\big([0,\infty); L^2(\mathcal{R}^3)^3 \oplus L^2(\mathcal{R}^3)^3\big) \cap C^0\big([0,\infty); D(A)\big).$$

因为问题 (27) 的解 $u \in C^0([0,\infty); D(A))$，根据定理 3，有以下定理。

定理 6　对任意给定的

$$t > 0, \quad \begin{cases} \overrightarrow{E} = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}}\overrightarrow{E'}, \\ \overrightarrow{H} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\overrightarrow{H'}, \end{cases}$$

在Γ上有属于$\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3 \oplus \mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3$的迹。且在定理3的意义下满足交界面条件。

致谢：感谢我的导师李大潜先生在学习、研究工作中给予了我精心的指导，在生活上给予了无微不至的关怀。特别感谢Ecole Polytechnique的Jean-Claude Nedelec教授。他是该领域的专家，对我这篇文章中的许多难点给予了点拨和启发。另外还要感谢蔡志杰老师和秦铁虎老师在论文写作过程中提出的有益的意见和建议。

参考文献：

[1] 李大潜等. 有限元素法在电法测井中的应用[M]. 北京：石油工业出版社，1980
Li D Q, *et al.* Application of Finite Element Method in Well Logging[M]. Beijing: Petroleum Industry Press, 1980
[2] Jean-Claude Nedelec. Acoustic and Electromagnetic Equations: Intergral Representations for Harmonic Problems[M]. New York: Springer-Verlag New York, 2000
[3] 李开泰，马逸尘. 数学物理方程Hilbert空间方法[M]. 北京：科学出版社，2008
Li K T, Ma Y C. The Method of Hilbert Space for Mathematical Physics Equations[M]. Beijing: Science Press, 2008
[4] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1983
[5] 陈恕行. 现代偏微分方程导论[M]. 北京：科学出版社，2005
Chen S X. Introduction to Modern Partial Differential Equations[M]. Beijing: Science Press, 2005

Cauchy Problem for the Maxwell-Ohm System with Piecewise Constant Coefficients

CHEN Ming-ye

(School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433)

Abstract: In the mathematical model of a well logging, we confront with a problem of the Maxwell-Ohm system which has discontinuous coefficients. In this paper, we study a typical form of this problem—the Cauchy problem for the Maxwell-Ohm system with piecewise constant coefficients. After studying properties of the relevant Sobolev space, we prove the well-posedness of this problem by means of the theory on the semi-group of operators.

Keywords: Maxwell-Ohm system; discontinuous coefficient; Cauchy problem; semigroup of operators

Received: 04 June 2009. **Accepted:** 11 Sep 2009.